Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas IV (MA-2115)
Septiembre-Diciembre 2008

4$^{\text{ra}}$ Autoevaluación

Material Cubierto: La presente autoevaluación versa sobre el material cubierto en las clases 15 a la primera parte de la clase 18 del cronograma del curso, es decir, las secciones 13-17 del texto de los profesores Viola-Prioli.
Nota: La presente autoevaluación no tiene ningún valor para la nota final de este curso.
Notación: La función logaritmo natural, es decir, la función inversa de $g(x) = e^x$ se denotará por $f(x) = \log(x)$.
Sobre el tiempo estimado: El tiempo estimado se obtuvo multiplicando por 5 el tiempo que me tomó a mí resolver los problemas (en algunos casos agregando unos minutos para tener, por ejemplo, 25min en vez de 22min 30seg).
¿Comentarios, preguntas o errores? Escriba a la dirección `fojeda@usb.ve` (Prof. Francisco Ojeda). Por favor use el código (MA-2115) o nombre de este curso en el encabezado de su mensaje (ya que en caso contrario por desconocer al remitente probablemente borre su mensaje sin leerlo).

1. Desarrollo

Tiempo estimado: 1 hora 5 minutos
Instrucciones: Resuelva los siguiente problemas, justificando sus respuestas. Marque la respuesta correcta en cada una de las siguientes preguntas. Al finalizar, y antes, de proceder a la parte 2, verifique si sus respuestas son correctas. Se le sugiere que también lea las resoluciones proporcionadas de los problemas. Recuerde si su solución y la solución publicada difieren en el procedimiento, esto no necesariamente significa que su solución sea incorrecta, ya que puede haber más de una manera de resolver un problema. Por otro lado, el hecho que Ud. haya indicado la respuesta correcta, no significa que el procedimiento que Ud. usó esté necesariamente bien. Si Ud. tiene una duda respecto a su solución o a la solución proporcionada se le sugiere consulte a su profesor.

1.1. Preguntas

Pregunta 1.1. Sean

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

¿Serán X_1 y X_2 linealmente independientes en $(0, \infty)$?

(a) Son independientes $(0, \infty)$.

(b) Son dependientes en $(0, \infty)$.

Pregunta 1.2. Sea A una matriz 3×3 constante con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 distintos, y sean $\vec{K}_1$, $\vec{K}_2$ y $\vec{K}_3$ autovectores asociados respectivamente a cada uno de estos autovalores. ¿Será

$$\left\{ e^{\lambda_1 t}\vec{K}_1, e^{\lambda_2 t}\vec{K}_2, e^{\lambda_3 t}\vec{K}_3 \right\}$$

un conjunto fundamental de soluciones del sistema $X' = A\vec{X}$?

(a) **Si** es conjunto fundamental de soluciones del sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$.

(b) **No** es conjunto fundamental de soluciones del sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$.

Pregunta 1.3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - y. \end{aligned}$$

Se sabe que $\{x_1(t) = \cos(t) + \operatorname{sen}(t), y_1(t) = 2\operatorname{sen}(t)\}$ y $\{x_2(t) = \operatorname{sen}(t), y_2(t) = \operatorname{sen}(t) - \cos(t)\}$ son soluciones de dicho sistema (en $\mathbb{R}$). ¿Son estas soluciones linealmente independientes?

(a) **No** son linealmente independientes.

(b) **Si** son linealmente independientes.

Pregunta 1.4. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Resuelva el sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$.

(a)

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(b)

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(c)

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(d)

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

1.2. Respuestas

1.1 (a), 1.2 (a), 1.3 (b), 1.4 (c)

1.3. Resolución de los problemas

Solución 1.1. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que los vectores son dependientes en $(0,\infty)$, tendríamos entonces que existe una constante α tal que $X_1(t) = \alpha X_2(t)$ o tal que $X_2(t) = \alpha X_1(t)$. Como en el intervalo $(0,\infty)$ las entradas de nuestras vectores son estrictamente positivas, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $X_1(t) = \alpha X_2(t)$, pero esto nos dice que

$$\left\{ \begin{array}{c} t = \alpha t^2 \\ 1 = \alpha 2t \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1/t = \alpha \\ 1/2t = \alpha \end{array} \right.$$

Y esto es claramente falso (recuerde que $t > 0$). Esta contradicción nos dice que X_1 y X_2 son linealmente independientes en $(0,\infty)$.

Solución 1.2. Cómo la matriz A es 3×3, el espacio de soluciones V_A de $X' = AX$ tiene dimensión 3. Por otro sabemos que $\vec{X}(t) = e^{\lambda t}\vec{K}$ es solución del sistema homogéneo $\vec{X}' = A\vec{X}$ si y sólo si $\vec{K} = \vec{0}$ o λ es autovalor de A y $\vec{K}$ es un autovector asociado a λ. Esto implica que $\vec{K}_i e^{\lambda_i t}$ es solución de $X' = AX$, para $i = 1,2,3$. Más aún estás soluciones son linealmente independientes por corresponder a autovalores distintos de A y por lo tanto $\left\{ e^{\lambda_1 t}\vec{K}_1, e^{\lambda_2 t}\vec{K}_2, e^{\lambda_3 t}\vec{K}_3 \right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema $X' = AX$.

Solución 1.3. Como ya sabemos que los pares de funciones dados, son soluciones de nuestro sistema en $\mathbb{R}$, basta entonces calcular el Wronskiano para algún $t \in \mathbb{R}$. Entonces queremos calcular

$$W\left(\begin{pmatrix} \cos(t) + \operatorname{sen}(t) \\ 2\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) - \cos(t) \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \cos(t) + \operatorname{sen}(t) & \operatorname{sen}(t) \\ 2\operatorname{sen}(t) & \operatorname{sen}(t) - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Vemos que en $t = 0$, la cuenta se simplifica, así que

$$\det \begin{pmatrix} \cos(0) + \operatorname{sen}(0) & \operatorname{sen}(0) \\ 2\operatorname{sen}(0) & \operatorname{sen}(0) - \cos(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Por lo tanto las soluciones son linealmente independientes.

Solución 1.4. Primero buscamos los autovalores de A. Para ello buscamos las raíces de $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Entonces

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)\left((-1-\lambda)(-4-\lambda)+2\right) \\ &= -(\lambda+3)\left(\lambda^2+5\lambda+6\right) = -(\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda+2) = -(\lambda+3)^2(\lambda+2). \end{aligned}$$

Entonces los autovalores son $\lambda_1 = -2$ con multiplicidad 1 y $\lambda_2 = -3$ con multiplicidad 2. Buscamos los autoespacios V_{λ_1} y V_{λ_2} asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente. Comenzamos con λ_1. Resolvemos entonces el sistema $(A - \lambda_1 I)\,\vec{K} = \vec{0}$. Es decir,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se ve fácilmente que $k_1 = 0$ y $k_2 = 2k_3$, y entonces

$$V_{\lambda_1} = gn \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ahora calculamos V_{λ_2}. Resolvemos entonces el sistema $(A - \lambda_2 I)\,\vec{K} = \vec{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $k_2 = k_3$ y por lo tanto

$$V_{\lambda_2} = gn \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces las soluciones de nuestro sistema son de la forma

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
Nota: Observamos que el sistema de ecuaciones diferenciales que resolvimos es de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 - 2x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_2 - 4x_3 \end{cases}$$

Observen que x_1 sólo aparece en la primera ecuación y que x_2 y x_3 sólo aparecen en la segunda y tercera ecuación. Entonces este sistema se ha podido trabajar resolviendo la primera ecuación (que no depende de x_2 ni x_3) y resolviendo las dos últimas ecuaciones como un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales (este sistema nos daría x_2 y x_3).

2. Desarrollo. Más problemas

Tiempo estimado: 2 hora 5 minutos
Instrucciones: Resuelva los siguiente problemas, justificando sus respuestas. Marque la respuesta correcta en cada una de las siguientes preguntas. Al finalizar, y antes, de proceder a la parte 3, verifique si sus respuestas son correctas. Se le sugiere que también lea las resoluciones proporcionadas

de los problemas. Recuerde si su solución y la solución publicada difieren en el procedimiento, esto no necesariamente significa que su solución sea incorrecta, ya que puede haber más de una manera de resolver un problema. Por otro lado, el hecho que Ud. haya indicado la respuesta correcta, no significa que el procedimiento que Ud. usó esté necesariamente bien. Si Ud. tiene una duda respecto a su solución o a la solución proporcionada se le sugiere consulte a su profesor.

2.1. Preguntas

Pregunta 2.1. Sea B una matriz constante $n \times n$ y $\vec{X}_1(t) = e^{\beta t}\vec{K}$, donde $\vec{K} \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{K} \neq \vec{0}$. Se sabe que $\vec{X}_1' = B\vec{X}_1$. Entonces

(a) β es autovalor de B y $\vec{K}$ es un vector arbitrario.

(b) $\vec{K} = 0$.

(c) β es autovalor de B y $\vec{K}$ es un autovector asociado a β.

(d) ninguna de las anteriores

Pregunta 2.2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - y. \end{aligned}$$

Se sabe que $\{x_1(t) = \cos(t) + \operatorname{sen}(t), y_1(t) = 2\operatorname{sen}(t)\}$ y $\{x_2(t) = \operatorname{sen}(t), y_2(t) = \operatorname{sen}(t) - \cos(t)\}$ son soluciones linealmente independientes de dicho sistema (en $\mathbb{R}$). Encuentre la solución que satisfaga $x(0) = 1$ y $y(0) = -2$.

(a) $\{x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(t) - 2\cos(t)\}$

(b) $\{x(t) = 4\operatorname{sen}(t) - 2\cos(t) + 3, y(t) = \cos(t) + 3\operatorname{sen}(t) - 3\}$.

(c) $\{x(t)) = 4\operatorname{sen}(t) - 2\cos(t), y(t) = \cos(t) + 3\operatorname{sen}(t)\}$.

(d) $\{x(t) = \cos(t) + 3\operatorname{sen}(t), y(t) = 4\operatorname{sen}(t) - 2\cos(t)\}$.

(e) $\{x\,(t) = 1, y\,(t) = -2\}$.

Pregunta 2.3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resuelva el sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$.

(a)

$$\vec{X}\,(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(b)

$$\vec{X}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(c)

$$\vec{X}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(d)

$$\vec{X}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{senh}(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(e)

$$\vec{X}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Pregunta 2.4. Resuelva

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x + y + 2e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} &= x - 2y + 3t \end{aligned}$$

con $x(0) = \frac{5}{6}$ y $y(0) = -\frac{1}{2}$.

(a)

$$\begin{cases} x(t) = t + \frac{13}{6}e^{-t} + te^{-t} - \frac{4}{3} \\ y(t) = 2t + \frac{7}{6}e^{-t} + te^{-t} - \frac{5}{3} \end{cases}.$$

(b)

$$\begin{cases} x(t) = \frac{13}{6}e^{-t} + te^{-t} - \frac{4}{3} \\ y(t) = \frac{7}{6}e^{-t} + te^{-t} - \frac{5}{3} \end{cases}.$$

(c)

$$\begin{cases} x(t) = 2t + \frac{13}{6}e^{-t} + te^{-t} - \frac{5}{3} \\ y(t) = t + \frac{7}{6}e^{-t} + te^{-t} - \frac{4}{3} \end{cases}.$$

(d)

$$\begin{cases} x(t) = 2t + \frac{7}{6}e^{-t} + te^{-t} - \frac{5}{3} \\ y(t) = t + \frac{13}{6}e^{-t} + te^{-t} - \frac{4}{3} \end{cases}.$$

(e)

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = t + \frac{1}{6}e^{-t} + te^{t} - \frac{4}{3} \\ y(t) = 2t + \frac{5}{6}e^{-t} + te^{t} - \frac{5}{3} \end{array}\right. .$$

Las respuestas a esta parte se encuentran en la página siguiente

2.2. Respuestas

2.1 (c), 2.2 (d), 2.3 (e), 2.4(a)

2.3. Resolución de los problemas

Solución 2.1. Tenemos un teorema que dice lo siguiente: si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $\vec{X}(t) = e^{\lambda t}\vec{K}$ es solución del sistema homogéneo $\vec{X}' = A\vec{X}$ si, y sólo si, $\vec{K} = \vec{0}$ o λ es autovalor de A y $\vec{K}$ es autovector asociado a λ. En nuestro caso este teorema implica que β es autovalor de B y $\vec{K}$ es un autovector asociado a β

Solución 2.2. Dado que $\{x_1, y_1\}$ y $\{x_2, y_2\}$ son soluciones linealmente independientes, tenemos que la solución general es de la forma

$$\{x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)\} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

es decir,

$$\{x(t) = c_1(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)) + c_2 \operatorname{sen}(t), y(t) = c_1 2 \operatorname{sen}(t) + c_2(\operatorname{sen}(t) - \cos(t))\} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Entonces queremos que

$$\begin{cases} x(0) = c_1(\cos(0) + \operatorname{sen}(0)) + c_2 \operatorname{sen}(0) = 1 \\ y(0) = c_1 2 \operatorname{sen}(0) + c_2(\operatorname{sen}(0) - \cos(0)) = -2 \end{cases},$$

es decir,

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_2 = -2 \end{cases},$$

es decir, $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$ y por lo tanto

$$\{x(t) = \cos(t) + 3\operatorname{sen}(t), y(t) = 4\operatorname{sen}(t) - 2\cos(t)\}.$$

Solución 2.3. Primero buscamos los autovalores de A. Para ello buscamos las raíces de $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Entonces

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)(1-\lambda)+4) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 5\right) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-(1+2i))(\lambda-(1-2i)) = 0. \end{aligned}$$

Entonces los autovalores son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1+2i$ y $\lambda_3 = 1-2i$. Entonces buscamos los autoespacios V_{λ_1} y V_{λ_2}. Primero resolvemos $(A - \lambda_1 I)\vec{K} = \vec{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $k_2 = k_3 = 0$ y por lo tanto

$$V_{\lambda_1} = gn\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Entonces $\vec{X}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución de nuestro sistema. Ahora resolvemos $(A - \lambda_2 I)\vec{K} = \vec{0}$. Entonces

$$\begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & -2 \\ 0 & 2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $k_1 = 0$, $k_3 = -ik_2$, y por lo tanto

$$V_{\lambda_2} = gn \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces la parte real e imaginaria de

$$\begin{aligned} \vec{Z}(t) &= e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^t e^{2ti} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^t \left(\cos(2t) + i \operatorname{sen}(2t)\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) + i \operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) - i \cos(2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

son soluciones linealmente independientes de nuestro sistema, es decir,

$$\vec{X}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix}$$

y

$$\vec{X}_3(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$$

son soluciones linealmente independientes de nuestro sistema. Finalmente, todas las soluciones de nuestro sistema son de la forma

$$\vec{X}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Solución 2.4. Escribimos nuestro sistema en forma matricial, es decir, como $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{G}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \vec{G} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}.$$

Primero resolvemos el sistema homogéneo asociado $\vec{X}' = A\vec{X}$. Buscamos los autovalores de A,

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(-2-\lambda) - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda+1).$$

Entonces los autovalores son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -1$ (cada uno con multiplicidad uno). Ahora buscamos los autoespacios asociados a nuestros autovalores, primero resolvemos $(A - \lambda_1 I)\vec{K} = \vec{0}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = -k_2,$$

y por lo tanto

$$V_{\lambda_1} = gn \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ahora resolvemos $(A - \lambda_2 I)\vec{K} = \vec{0}$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = k_2,$$

y por lo tanto

$$V_{\lambda_2} = gn \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces la solución general del sistema homogéneo asociado es

$$\vec{X}_h(t) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Entonces una matriz fundamental para nuestro sistema es

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Buscamos ahora $\vec{F}$ tal que $\Psi \vec{F} = \vec{G}$, es decir, $\vec{F} = \int \Psi^{-1} \vec{G} dt$. Entonces

$$\Psi^{-1}(t) = \frac{1}{2e^{-4t}} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ e^{t} & e^{t} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$\Psi^{-1}(t)\vec{G} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ e^{t} & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} - \frac{3}{2} t e^{3t} \\ 1 + \frac{3}{2} t e^{t} \end{pmatrix}.$$

Entonces[1]

$$\vec{F} = \int \Psi^{-1} \vec{G} dt = \begin{pmatrix} \int \left(e^{2t} - \frac{3}{2} t e^{3t}\right) dt \\ \int \left(1 + \frac{3}{2} t e^{t}\right) dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{6} e^{3t} - \frac{1}{2} t e^{3t} \\ t - \frac{3}{2} e^{t} + \frac{3}{2} t e^{t} \end{pmatrix}.$$

Entonces una solución particular es

$$\vec{X}_p(t) = \Psi \vec{F} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{6} e^{3t} - \frac{1}{2} t e^{3t} \\ t - \frac{3}{2} e^{t} + \frac{3}{2} t e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2} e^{-t} + t e^{-t} - \frac{4}{3} \\ 2t - \frac{1}{2} e^{-t} + t e^{-t} - \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Entonces la solución general del sistema $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{G}$ es

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_h(t) + X_p(t) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2} e^{-t} + t e^{-t} - \frac{4}{3} \\ 2t - \frac{1}{2} e^{-t} + t e^{-t} - \frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

[1] Las integrales $\int t e^t dt$ y $\int t e^{3t} dt$ se puede calcular usando integración por partes.

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Recordamos que queremos que $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, entonces

$$\left\{ \begin{array}{c} c_1 + c_2 + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} = \frac{5}{6} \\ -c_1 + c_2 - \frac{1}{2} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{2} \end{array} \right. .$$

Sumando estas dos ecuaciones tenemos que $2c_2 - \frac{9}{3} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ y entonces $c_2 = \frac{5}{3}$ y $c_1 = 0$. Finalmente,

$$\vec{X}(t) = \frac{5}{3}e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} - \frac{4}{3} \\ 2t - \frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} - \frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{5}{3}e^{-t} + t + \frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} - \frac{4}{3} = t + \frac{13}{6}e^{-t} + te^{-t} - \frac{4}{3} \\ y(t) = \frac{5}{3}e^{-t} + 2t - \frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} - \frac{5}{3} = 2t + \frac{7}{6}e^{-t} + te^{-t} - \frac{5}{3} \end{array} \right. .$$

3. Desarrollo. Aún más problemas

Tiempo estimado: 2 hora 5 minutos
Instrucciones: Resuelva los siguiente problemas, justificando sus respuestas. Marque la respuesta correcta en cada una de las siguientes preguntas. Al finalizar verifique si sus respuestas son correctas. Se le sugiere que también lea las resoluciones proporcionadas de los problemas. Recuerde si su solución y la solución publicada difieren en el procedimiento, esto no necesariamente significa que su solución sea incorrecta, ya que puede haber más de una manera de resolver un problema. Por otro lado, el hecho que Ud. haya indicado la respuesta correcta, no significa que el procedimiento que Ud. usó esté necesariamente bien. Si Ud. tiene una duda respecto a su solución o a la solución proporcionada se le sugiere consulte a su profesor.

3.1. Preguntas

Pregunta 3.1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se sabe que la solución un conjunto fundamental de soluciones de $\vec{X}' = A\vec{X}$ está dado por

$$\left\{ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} \right\}.$$

Resuelva el sistema $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{G}$ donde $\vec{G} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \end{pmatrix}$. Si le hace falta puede usar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ 0 & \operatorname{sen}(2t) & -\cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ 0 & \operatorname{sen}(2t) & -\cos(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a)

$$\vec{X}\,(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(3t) \\ -\cos(3t) \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(b)

$$\vec{X}\,(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(c)

$$\vec{X}\,(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(d)

$$\vec{X}\,(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Pregunta 3.2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Se sabe que

$$p_A\,(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 & -3 \\ 20 & 3-\lambda & 10 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda - 18 = -\left(\lambda+2\right)\left(\lambda-3\right)^2$$

y que los autoespacios asociados a $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 3$ son

$$V_{\lambda_1} = gn \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } V_{\lambda_2} = gn \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Resuelva el sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$.

(a)

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 e^{-3t} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(b)

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(c)

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(d)

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \left(\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Pregunta 3.3. Sean

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Se sabe que X_1 y X_2 son linealmente independientes en $(0, \infty)$. Halle una matriz $A(t)$ tal que $\{X_1, X_2\}$ sea un conjunto fundamental de soluciones del sistema $X' = AX$.

(a)

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}.$$

(b)

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -\frac{2}{t} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}.$$

(c)

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{3}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}.$$

(d)

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{t^2} & -\frac{2}{t} \end{pmatrix}.$$

Pregunta 3.4. Sea $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Considere el sistema

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\vec{X}_1$ y $\vec{X}_2$ son soluciones de este sistema, entonces ¿será cierto que $\vec{X}_1 + \vec{X}_2$ también lo es?

(a) **Si** es solución

(b) **No** es solución

Las respuestas a esta parte se encuentran en la página siguiente

3.2. Respuestas

3.1 (b), 3.2 (c), 3.3 (a), 3.4 (b)

3.3. Resolución de los problemas

Solución 3.1. Tenemos entonces que la solución del general sistema homogéneo asociado está dada por

$$\vec{X}_h(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Como $\vec{X} = \vec{X}_h + \vec{X}_p$, sólo nos falta encontrar una solución particular $\vec{X}_p$ del sistema dado. Buscamos $\vec{F}$ tal que $\Psi \vec{F}' = \vec{G}$, es decir, $\vec{F} = \int \Psi^{-1} \vec{G} dt$, donde

$$\Psi = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos(2t) & e^t \operatorname{sen}(2t) \\ 0 & e^t \operatorname{sen}(2t) & -e^t \cos(2t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ 0 & \operatorname{sen}(2t) & -\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

es una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado. Entonces, usando la ecuación (1) tenemos que

$$\Psi^{-1} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ 0 & \operatorname{sen}(2t) & -\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\Psi^{-1}\vec{G} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ 0 & \operatorname{sen}(2t) & -\cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Ahora tenemos que calcular $\int \Psi^{-1}\vec{G} dt$,

$$\vec{F} = \int \Psi^{-1}\vec{G} dt = \begin{pmatrix} \int 1 dt \\ -\int \operatorname{sen}(2t)\, dt \\ \int \cos(2t)\, dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{\cos(2t)}{2} \\ \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \vec{X}_p(t) &= \Psi \vec{F} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos(2t) & e^t \operatorname{sen}(2t) \\ 0 & e^t \operatorname{sen}(2t) & -e^t \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \frac{\cos(2t)}{2} \\ \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \frac{\cos^2(2t)}{2} + e^t \frac{\operatorname{sen}^2(2t)}{2} \\ e^t \frac{\operatorname{sen}(2t)\cos(2t)}{2} - e^t \frac{\cos(2t)\operatorname{sen}(2t)}{2} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente la solución buscada es

$$\vec{X}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Solución 3.2. Como $V_{\lambda_1} = gn\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ tenemos que $\vec{X}_1(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de nuestro sistema. De la misma manera como $V_{\lambda_2} = gn\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ entonces $\vec{X}_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución de nuestro sistema. Como la dimensión de V_{λ_2} es 1 y esto es menor que la multiplicidad de λ_2, entonces buscamos otra solución $\vec{X}_3$ y está será de la forma $\vec{X}_3 = e^{3t}\left(\vec{K} + t\vec{P}\right)$ donde $\vec{K}$ y $\vec{P}$ se eligen para que $\vec{X}_3' = A\vec{X}_3$. Entonces $\vec{X}_3' = e^{3t}\left(3\vec{K} + 3t\vec{P} + \vec{P}\right)$ y $A\vec{X}_3 = e^{3t}\left(A\vec{K} + tA\vec{P}\right)$ lo que implica que

$$3\vec{K} + 3t\vec{P} + \vec{P} = A\vec{K} + tA\vec{P}$$

y por lo tanto

$$\vec{P} = (A - 3I)\vec{K} \text{ y } (3I - A)\vec{P} = \vec{0}.$$

La segunda ecuación nos dice que $\vec{P} \in V_{\lambda_2}$ y por lo tanto podemos tomar $\vec{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Entonces el sistema $(A - 3I)\vec{K} = \vec{P}$ se convierte en

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 20 & 0 & 10 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dividimos a la fila 2 entre 20 e intercambiamos las filas 1 y 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -6 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Usamos entrada 1,1 para cancelar las entradas 2,1 y 3,1,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y finalmente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $k_1 = -\frac{1}{2}k_3$ y $k_2 = -1$, por lo tanto podemos elegir

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\vec{X}_3 = e^{3t}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Finalmente todas las soluciones de nuestros sistema de ecuaciones diferenciales son de la forma

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

para constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Solución 3.3. Queremos encontrar $A(t)$ tal que $X_1' = AX_1$ y $X_2' = AX_2$ para $t > 0$. Sea $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$. Trabajamos primero con $X_1' = AX_1$, entonces

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ta(t) + b(t) = 1 \\ tc(t) + d(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b(t) = 1 - ta(t) \\ d(t) = -tc(t) \end{cases}.$$

Trabajamos ahora con $X_2' = AX_2$, entonces

$$\begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t^2 a(t) + 2tb(t) = 2t \\ t^2 c(t) + 2td(t) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b(t) = 1 - \frac{ta(t)}{2} \\ d(t) = \frac{1}{t} - \frac{tc(t)}{2} \end{cases}.$$

Por lo tanto

$$1 - ta(t) = 1 - \frac{ta(t)}{2} \text{ y } -tc(t) = \frac{1}{t} - \frac{tc(t)}{2} \Rightarrow a(t) = 0 \text{ y } c(t) = -\frac{2}{t^2}.$$

Entonces,

$$\begin{cases} ta(t) + b(t) = 1 \\ tc(t) + d(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b(t) = 1 \\ t\left(-\frac{2}{t^2}\right) + d(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b(t) = 1 \\ d(t) = \frac{2}{t} \end{cases}.$$

Finalmente

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}.$$

Solución 3.4. Esto es falso, ya que

$$(X_1 + X_2)' = X_1' + X_2' = AX_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + AX_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A(X_1 + X_2) + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y esto es claramente distinto de

$$A(X_1 + X_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ya que si fueran iguales tendríamos que

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$